

Chapitre II : Cinématique du point matériel :

I - Généralités

- c'est l'étude du mvt du point mat sans tenir compte des causes de ce mvt.
- un point mat est une région de l'espace très petite où est localisée une quantité de matière.
- la description du mvt ne fait pas rapport à un observateur pour cela un référentiel défini par un système d'axes de coordonnées est liée à cet observateur est muni d'un moyen de mesurer le temps.
- le référentiel sera désigné par $R(O, x, y, z)$. le repère lié à R est le repère cartésien, pour décrire le mvt d'un point matériel on peut considérer d'autre repère autre que le repère défini par le système d'axes de référentiel.

Conclusion : à un peuvent être attachés plusieurs repères de projection qui ne sont pas considérés des référentiels.

II - Vecteur position :

Dans un référentiel R la position d'un point mat M à un instant t est défini par $\vec{r}(t) = \vec{OM}$

Elle peut être exprimée dans différents systèmes de coordonnées cartésiennes.

1. Système de coordonnées cartésiennes :

- Repère cart : $R(O, x, y, z)$ - Base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ou $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

- vect déplacement élémentaire : soit M la position du pt mat à un instant t et M' le point à un instant $(t + \Delta t)$

$$\Delta \vec{OM'} = \vec{OM'} - \vec{OM} \text{ or } M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } M' \begin{pmatrix} x + \Delta x \\ y + \Delta y \\ z + \Delta z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{OM} = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} + \Delta z \vec{k}$$

quand $M' \rightarrow M$ on écrit : $d\vec{OM} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$ est le vect déplacement élémentaire on écrit aussi $d\vec{r}$.

2 - Système de Coord. Cylindriques:

- Coord. Cylindriques sont: $r = \|\vec{OM}\|$ $r \geq 0$

$$\theta = (\vec{OM}, \vec{OM}) \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$z = \rho \cdot \vec{k} + \vec{0}$$

- Base associé: $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

$$\Rightarrow \vec{OM} = \vec{OM} + \vec{m} \vec{k} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$$

Exprimant le vect cyl en fct des coord

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \text{Proj}(\vec{e}_r) \vec{i} + \text{Proj}(\vec{e}_r) \vec{j} + \text{Proj}(\vec{e}_r) \vec{k} \\ &= (\vec{e}_r \cdot \vec{i}) \cdot \vec{i} + (\vec{e}_r \cdot \vec{j}) \cdot \vec{j} + (\vec{e}_r \cdot \vec{k}) \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} + 0$$

$$\text{de m on trouve: } \vec{e}_\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

$$= -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

$$\vec{OM} = r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j} + z \vec{k} \text{ qui donne alors:}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \text{ et par inversion } r = f(x, y, z) \\ \theta = f(x, y, z)$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{et on a: } \frac{y}{x} = \tan \theta \Rightarrow \theta = \text{Arctan} \frac{y}{x}$$

$$\text{+ vect dep elementaire: } d\vec{OM} = d(r \vec{e}_r + z \vec{e}_z) = d(r \vec{e}_r) + d(z \vec{e}_z)$$

$$= dr \vec{e}_r + r d\vec{e}_r + dz \vec{e}_z + z d\vec{e}_z$$

$$d\vec{e}_r? \quad \vec{e}_r \text{ dépend de } \theta: d\vec{e}_r = \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} d\theta = (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) d\theta = \vec{e}_\theta d\theta$$

$$\Rightarrow d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$$

Remarque:

$$a \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta \quad \text{et de m on a: } \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j} = -\vec{e}_r$$

↳ lorsque M se déplace, les vecteurs $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ changent $\Rightarrow (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ est une base mobile.

$$\text{A un vect qq } \vec{V} \text{ peut être écrit: } \vec{V} = V_r \vec{e}_r + V_\theta \vec{e}_\theta + V_z \vec{e}_z$$

Cas particuliers:

Cas d'un plan où $(z=0)$

$r = \|\vec{OM}\|$: rayon polaire.

$\theta = (\vec{OZ}, \vec{OK})$ angle polaire

$\vec{V}' = \underbrace{V_r \vec{e}_r}_{\text{comp radiale}} + V_\theta \vec{e}_\theta$ comp orthoradiale.



$\Rightarrow x = r \cos \theta$

$\vec{OK} = r \vec{e}_r$

$y = r \sin \theta$

$d\vec{OK} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$

3. Coord. sphériques:

Considérons un point matériel M en mouvement dans un repère $R(O; x; y; z)$

la position du point M peut être repérée par les c. sphériques

$-r = \|\vec{OM}\| \quad r \in [0; +\infty[$

$-\theta = (\vec{OZ}, \vec{OM}) \quad \theta \in [0; \pi]$

$-\varphi = (\vec{OM}, \vec{Ox}) \quad \varphi \in [0; 2\pi]$

m. Proj. de M sur le plan xOx

Remarque

- Quand θ et φ restent ctes et r varie $\Rightarrow M$ décrit une droite.

- Quand r et φ restent ctes et θ varie $\Rightarrow M$ décrit un demi-cercle (Méridien).

- Quand r et θ restent ctes et φ varie $\Rightarrow M$ décrit un cercle d'axe Oz et de rayon θm .

Définissons les vect. unitaires $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$

$\vec{e}_r = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$

\vec{e}_θ = le vect. unitaire tangent en M au méridien dans le sens croissant de θ

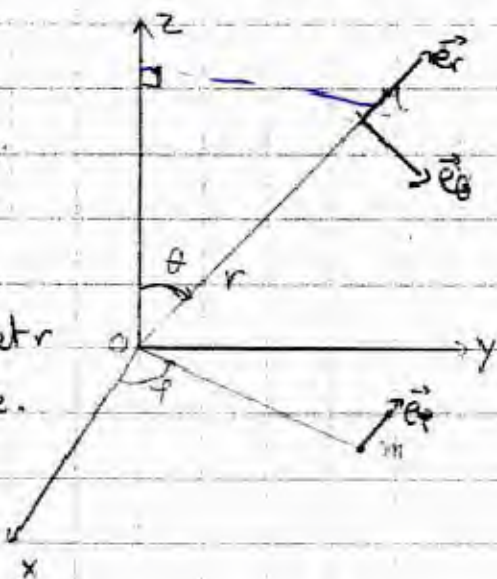
\vec{e}_φ : vect. unitaire tangent au cercle décrit par M dans le sens croissant de φ + φ : longitude.
+ θ : Colatitude.

Relations entre les c.c. et les c.s:

$\Rightarrow x = \theta m \cos \varphi$

$y = \theta m \sin \varphi$

$z = \theta m \cos \theta = r$



d'après la figure $p = 0 \text{ m}$ et $\sin \theta = \frac{q}{r} \Rightarrow 0 \text{ m} = r \sin \theta$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

\Rightarrow Retrouvons r, θ, φ en fct de (x, y, z)

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + r^2 \cos^2 \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\rho = ? \quad \frac{y}{x} = \tan \alpha \Rightarrow \alpha = \arctan \frac{y}{x}$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \theta \Rightarrow r \sin \theta = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = r \cos \theta \quad \tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

$$\theta = \arctan \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{3} \right)$$

Exprime les vects unit. sphe en fct des vects unit e :

→ Projection \vec{e}_i sur (\vec{OZ}, \vec{Om})

$$\vec{e}_r = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \vec{e}_r + \cos \theta \vec{k}$$

→ Projection \vec{e}_p sur $(Ox; Oy)$

$$\vec{e}_\rho = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{e}_r = \sin\theta \cos\varphi \vec{i} + \sin\theta \sin\varphi \vec{j} + \cos\theta \vec{k}$$

$$\vec{e}_\theta = \cos \theta \vec{e}_r + \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \vec{e}_\phi$$

$$\Rightarrow \vec{e}_G = \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} + \sin \theta \vec{k}$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin\theta \vec{e}_r + \cos\theta \vec{e}_\phi$$

vec position $\vec{ON} = ?$

en CS $\vec{OH} = r\vec{e}_r$

$$\Rightarrow \vec{OM} = r\vec{e}_r \Rightarrow \vec{OM} = \underbrace{r \sin \theta \cos \theta}_x \vec{i} + \underbrace{r \sin \theta \sin \theta}_y \vec{j} + \underbrace{r \cos \theta}_z \vec{k}$$

vect déplacement élémentaire

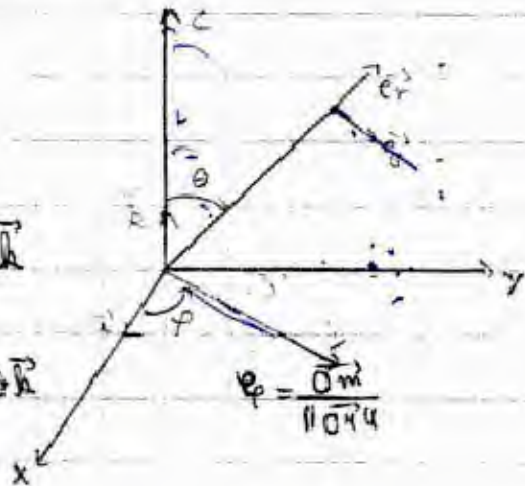
vect déplacement élémentaire

$$d\vec{r} = d(r\vec{e}_r) = dr\vec{e}_r + r\vec{e}_r$$

$$\text{or } d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} d\phi$$

$$\frac{\partial d(e_i)}{\partial e_i} = \bar{e}_i$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{e}_\theta}{d\varphi} = -\sin\theta \sin\varphi \vec{e}_r + \sin\theta \cos\varphi \vec{e}_\varphi$$



$$\rightarrow d\vec{e}_\varphi = d\theta \vec{e}_\theta + \sin\theta d\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{e}_\varphi$$

III - Trajectoire d'un point mat:

1. Equ du mv

Soit un point mat en mv par rapport à un référentiel R en se déplaçant le pt M décrit une courbe (C) appelée : Trajectoire. La nature de la trajectoire dépend du référentiel choisi.

L'équ paramétrique de la trajectoire de M est donnée par les coordonnées de M ds la base choisie en fct du temps.

- C. C: $x(t); y(t); z(t)$.

- C. Sph: $r(t); \theta(t); \varphi(t)$.

- C. sphé: $r(t); \theta(t); \varphi(t)$.

Les équ obtenues sont appelées : équations horaires du mv.

- On définit aussi ce qu'on appelle l'équ cartésienne de la trajectoire. Elle est obtenue en éliminant le paramètre t entre les différentes coordonnées cartésiennes.

Exemples: $\vec{OM} = r \cos\omega t \vec{e}_1 + r \sin\omega t \vec{e}_2$

Les eq horaires du mv sont:

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = r \cos(\omega t) \\ y(t) = r \sin(\omega t) \end{array} \right\} \Rightarrow y = f(x) \text{ équ. cart}$$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$: c l'équ d'un cercle de centre O(0,0) et de rayon r.

La trajectoire décrite par M est un cercle.

C/C: l'équ de la trajectoire permet de donner son allure.

2. Abscisse rectiligne

Soit par exemple x, y, z les coord cartésiennes d'un pt M en mv et dx, dy, dz des déplacements élémentaires. Lorsque le pt se déplace le long d'une trajectoire (C) d'une longueur élémentaire notée ds est donnée par $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$: c un élément d'arc aussi $ds = \|d\vec{OM}\|$.

$d\vec{OH}$: vect dep. elementaires.

on appel abscisse curviligne de M le long de (\mathcal{C}) à partir d'un point M_0 de (\mathcal{C}) est la longueur de l'arc M_0M .

$$s(t) = \int ds = \int \frac{ds}{dt} dt$$

$$s(t) = \int_t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \widehat{M_0M}$$

où t_0 est l'instant où le pt se trouve en M_0 .

t " " " " " " " M .

s_{M_0} : abscisse curviligne du pt M entre t_0 et t .

$s(t)$: est l'équation intrinsèque du mvt.

3 - Tangente d'une trajectoire (\mathcal{C})

- La tangente au pt M c la droite la plus proche possible de la courbe (\mathcal{C}) au voisinage de M .

- Le vect unitaire \vec{e}_t est celui porté par la tangente de M et orienté dans le sens du mvt.

$$\vec{e}_t = ?$$

le vect unitaire \vec{e}_t est défini aussi par $\vec{e}_t = \frac{d\vec{OH}}{\|d\vec{OH}\|} = \frac{d\vec{OH}}{ds}$

1 - Base du repère de Frenet

* On définit en un point M qq de la trajectoire le repère local appelé repère de Frenet (base de Frenet) par le vect unitaire suivant:

\vec{e}_t = vect unit tangent à (\mathcal{C})

\vec{e}_n : " " normal à (\mathcal{C}) orienté vers l'intérieur de (\mathcal{C}) est défini par:

$$\vec{e}_n = \rho \frac{d\vec{e}_t}{ds}$$

où ρ est le rayon de courbure de la trajectoire (\mathcal{C})

\vec{e}_t = vect unitaire, ce vect complète le tétraèdre direct $(\vec{e}_t, \vec{e}_r, \vec{e}_n)$

Cas particulier trajectoire circulaire \rightarrow coord polaires:

$$\begin{cases} r = R = \text{cte} \\ \theta = [0, 2\pi] \end{cases}$$

D'après la fig:

$\rightarrow \vec{e}_r$ n'est identifié à \vec{e}_0

$$\rightarrow \vec{e}_r = \frac{\partial \vec{e}}{\partial \theta} = R \frac{d\vec{e}}{d\theta} = R \frac{d\vec{e}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds}$$

On sait que $\frac{d\vec{e}}{d\theta} = -\vec{e}_r$

$$\frac{d\vec{e}}{d\theta} = -\vec{e}_r$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R} \text{ car } s = R\theta \Rightarrow ds = R d\theta$$

$$\vec{e}_n = R \left(\frac{-\vec{e}_r}{R} \right) = -\vec{e}_r$$

dans le cas de trajectoire circulaire:

$$\vec{e}_r = \vec{e}_0 \pm \vec{e}_n = -\vec{e}_r$$

IV - Vecteur vitesse

Soit $R(0; x, y, z)$ un réf donné et M un pt matériel, en mvt. ch R .

1. Vitesse moyenne:

* Soit t l'instant où le point est à la position M . Soit $t' = t + \Delta t$ l'instant de la position M'

$$\Rightarrow \text{la vitesse moyenne est définie par } \vec{v}_m = \frac{\vec{OM}' - \vec{OM}}{\Delta t} = \frac{MM'}{\Delta t}$$

$$\text{et } \|\vec{v}_m\| = \frac{MM'}{\Delta t} = \frac{s(t') - s(t)}{\Delta t}$$

où $s(t) = R_0 M$ et $s(t') = R_0 M'$ où M_0 est l'origine choisie sur la trajectoire (C) à l'instant initial t_0 .

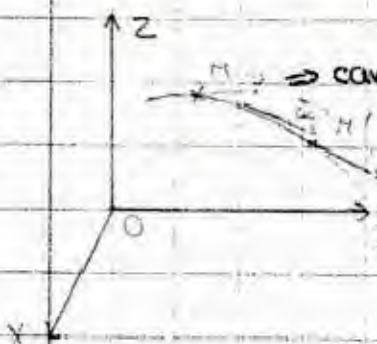
2. Vect vitesse instantanée:

* Il est défini $\vec{v}(M) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{MM'}{\Delta t}$ (M' est très proche de M)

$$\text{quand } M' \rightarrow M \quad MM' = d\vec{OM} \\ \text{et } \Delta t \rightarrow 0 \quad \Delta t = dt$$

$$\Rightarrow \vec{v}(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt} : \text{dérivée du vect position par rapport au temps}$$

$$\text{or } d\vec{OM} = ds \vec{e}_r \text{ et } \vec{v}(M) = \frac{ds}{dt} \vec{e}_r = \dot{s} \vec{e}_r$$



\Rightarrow caractéristiques du vect \vec{v} :

* pt d'app:

* Direction: Tangente en M de la trajectoire

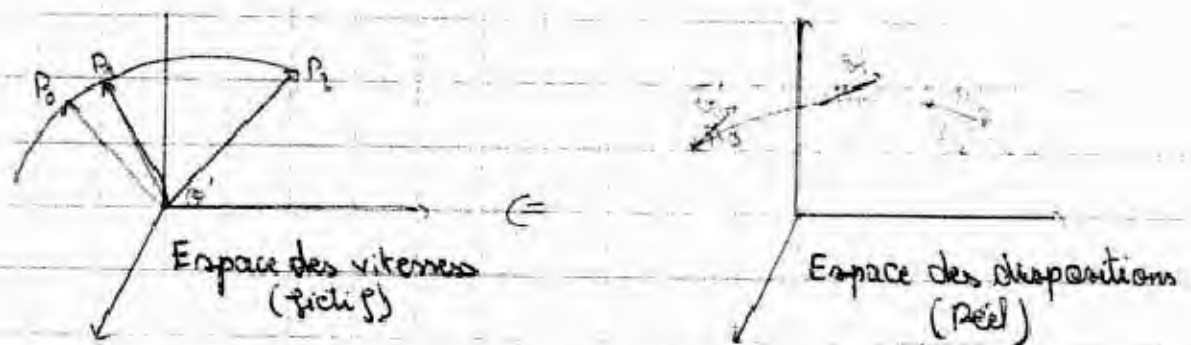
* le sens: Sens de la trajectoire / mvt

* Module: $\|\vec{v}\| = \dot{s} : \text{vitesse linéaire ou scalaire}$

3. Hodographe du mt :

* Le vect vitesse d'un pt M dans un réf R peut être associé à un point P tel que $\vec{OP} = \vec{v}(t)$. où O' est un pt fixe de R. P n'est pas un point de l'espace des positions, il évolue dans un autre espace qui est l'espace des vitesses.

→ L'hodographe du mt d'un point mobile est la trajectoire du pt P (la courbe qui le décrit)



* L'éq de l'Hodographe est obtenue en éliminant le paramètre "t" entre les composantes du vect vit.

II - Vecteur accélération:

* Il est défini par $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ ou aussi $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ (aussi noté $\ddot{\vec{r}}$)

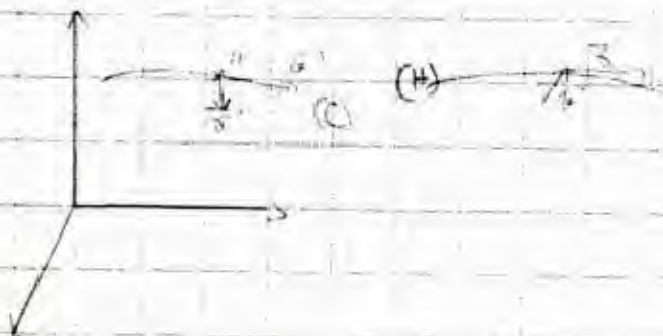
* L'accélération exprime la vitesse avec laquelle la vitesse du pt mt mobile varie.

* Les caractéristiques de \vec{a} :

* l'origine: la pos à l'instant t du pt mt

* la direction: orientée perpendic à l'hodographe

* le sens est orienté vers l'intérieur de la traj



III - Expressions des vect \vec{v} et \vec{a}

* Exprimons \vec{v} et \vec{a} ds les différents systèmes de coordonnées.

A - Système Cart.

* Vect pos: $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OR}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$$

$$R = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ sont fixes par rapport à R.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$$

2. Système cylindrique:

• Base: $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

$$\vec{OR} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OR}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$= \dot{r}\vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{z}\vec{e}_z \quad (\vec{e}_z \text{ est fixe \% à R})$$

$$d\vec{e}_r = \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} d\theta = d\theta \vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} (\vec{e}_r; \vec{e}_\theta; \vec{e}_z)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_R = \frac{d(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z)}{dt}$$

$$= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r} \frac{d\vec{e}_r}{dt} + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \ddot{z}\vec{e}_z$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} (-\vec{e}_r)$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} (\vec{e}_r; \vec{e}_\theta; \vec{e}_z)$$

• cas particulier: Coord. polaires

$$\begin{aligned} \bullet z=0 & \quad \left(\begin{array}{l} \vec{r} : \text{comp. radiale} \\ r\dot{\theta} : \text{comp. orthoradiale} \end{array} \right) \\ \bullet \vec{v} & \\ \bullet \vec{a} & \quad \left(\begin{array}{l} \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 : \text{comp. rad} \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} : \text{comp. ortho.} \end{array} \right) \end{aligned}$$

• Système sphérique:

• Base: $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$

$$\vec{OR} = r\vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

$$\text{or } \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta + \sin\theta \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \sin\theta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Big|_R = \frac{d(\sin\theta)}{dt} = \frac{d(\sin\theta)}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$\vec{\omega} = \dot{r} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt} + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \sin\theta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \cos\theta \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \sin\theta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{1}{dt} \left(\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} d\varphi \right)$$

$$= \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} \dot{\varphi}$$

$$\vec{e}_\theta = \cos\theta \cos\varphi \vec{i} + \cos\theta \sin\varphi \vec{j} - \sin\theta \vec{k}$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} &= -\cos\theta \sin\varphi \vec{i} + \cos\theta \cos\varphi \vec{j} \\ &= \cos\theta (-\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j}) \\ &= \cos\theta \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_r + \cos\theta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\text{calculons } \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} : \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = \dot{\varphi} (\cos\varphi \vec{i} + \sin\varphi \vec{j})$$

$$\text{or } \sin\theta (\vec{e}_r) = \sin\theta \cos\varphi \vec{i} + \sin\theta \sin\varphi \vec{j} + \cos\theta \vec{k}$$

$$\cos\theta (\vec{e}_\theta) = \cos\theta \cos\varphi \vec{i} + \cos\theta \sin\varphi \vec{j} - \sin\theta \vec{k}$$

$$\text{on remarque que } \sin\theta \vec{e}_r + \cos\theta \vec{e}_\theta = \cos\varphi \vec{i} + \sin\varphi \vec{j}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \dot{\varphi} (\sin\theta \vec{e}_r + \cos\theta \vec{e}_\theta)$$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 - r(\dot{\varphi})^2 \sin^2\theta \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r(\dot{\varphi})^2 \sin\theta \cos\theta \\ r\ddot{\varphi} \sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin\theta + 2\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos\theta \end{pmatrix} (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$$

4 - Comp $\vec{\omega}$ et \vec{v} dans la repère de Frenet:

Dans la base de Frenet le vecteur vitesse n'admet qu'une seule composante: Tangentielle.

$$\text{Par def: } \vec{v}_R(t) = \dot{\vec{r}} = v \vec{e}_t$$

Système cartésien $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

$$\vec{v}_A(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \vec{e}_t$$

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}$$

* vect acceleration:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\dot{s}\vec{e}_t)}{dt} = \frac{d\dot{s}}{dt} \vec{e}_t + \dot{s} \frac{d\vec{e}_t}{dt}$$

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{d\vec{e}_t}{ds} \frac{ds}{dt}$$

$$\text{or: } \vec{e}_n = \varphi \cdot \frac{d\vec{e}_t}{ds} \text{ et } \frac{ds}{dt} = \dot{s} = v$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{v}{\varphi} \cdot \vec{e}_n$$

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{\sigma_t} \vec{e}_t + \underbrace{\frac{v^2}{\varphi}}_{\sigma_n} \cdot \vec{e}_n$$

σ_t : compos tang de \vec{a} liée à la variation du module de \vec{v} .

σ_n : compos normale du vect \vec{a} liée au rayon du courbure de la traj.

$$\text{Rq: } \vec{v} \wedge \vec{a} = (v\vec{e}_t) \wedge \left(\frac{dv}{dt} \vec{e}_t + \frac{v^2}{\varphi} \vec{e}_n \right) = \frac{v^3}{\varphi} \vec{e}_n$$

$$\|\vec{v} \wedge \vec{a}\| = \frac{v^3}{\varphi}$$

On peut déterminer alors le rayon du courbure φ par

$$\varphi = \frac{v^3}{\|\vec{v} \wedge \vec{a}\|}$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

$$\vec{a} = \sigma_t \vec{e}_t + \sigma_n \vec{e}_n$$

$$\sigma_n = \frac{v^2}{\varphi} = \frac{v^2}{v^3} \|\vec{v} \wedge \vec{a}\|$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_t^2 + \sigma_n^2} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_t^2}$$

$$\sigma_n^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_t^2$$

VII - Exemples de mouvements simples

1. Nature du mvt :

* un mvt est accéléré si $\|\vec{v}\|$ augmente $\frac{d\vec{v}}{dt} > 0$
 et aussi $\frac{dv^2}{dt} > 0$ $\frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \left(\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} > 0 \right)$ mvt accéléré

ou encore $\frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$

$\vec{v} \cdot \vec{v} > 0$ pour un mvt accéléré

* de m pour le mvt retardé $\|\vec{v}\|$ décroît

avec le m raisonnement $\vec{v} \cdot \vec{v} < 0$

* mvt rectiligne : ($v = ct$)

$$\frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$$

\Rightarrow deux cas à distinguer

- $\vec{v} = \vec{a} \Rightarrow$ Il s'agit d'un mvt rectiligne uni forme.

- \vec{v} et \vec{a} sont orthogonaux \Rightarrow mvt circulaire uni forme.

2. Mvt rectiligne :

* Trajectoire droite :

$$\rho \rightarrow \infty \Rightarrow \sigma_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$$

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_t$$

* Eq horaire du mvt : Supposons que le pt M se déplace sur un

axe OX



$$OM = x \vec{i}$$

$$\vec{v} = \dot{x} \vec{i}$$

$$\text{Si } v = ct = v_0 \Rightarrow \dot{x} = v_0 \Rightarrow x = v_0 t + x_0$$

$$a(t=0; x=x_0)$$

$$x(t) = \frac{1}{2} v_0 t^2 + v_0 t + x_0 \quad (x(0) = x_0)$$

L'eq horaire du mvt rectiligne avec $v = ct$.

* Selon v on a :

\rightarrow Si $v_0 = 0$: mvt rectiligne uni forme.

$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2$ (New Centre)

$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0$ CO (new Centre)

2

100



11

100

10

100

1998

$$\bar{V} = 1$$

2007



—

1

14

41

144

1. *Journal of the American Medical Association*, 1997; 278: 1039-1044.

1

1

1

— 4 —

1

$$\vec{v} = v \cdot \vec{e}_t \text{ et } \vec{\sigma} = \sigma_n \cdot \vec{e}_n$$

$$\Rightarrow \vec{v} \perp \vec{\sigma}$$

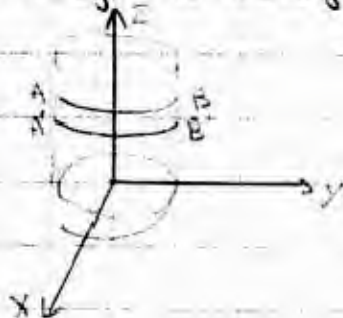
Ex: le mt circulaire: le mt d'un pendule conique.

un voiture de course qui se déplace sur une piste circulaire

L - mt hélicoïdal: $R(\phi, x, z)$

Par rapport au repère le point R se déplace sur une hélice circulaire (l'hélice est enroulée sur un cylindre de rayon R).

$$\begin{cases} r = R = \text{cte} \\ \theta(t) = \text{fct de temps} \\ z(t) = h \cdot \theta(t) / h = \text{cte} \end{cases}$$



+ Vect position: $\vec{OR} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$

$$= R\vec{e}_r + h\theta\vec{e}_z$$

+ vect vitesse: $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + h\dot{\theta}\vec{e}_z$

+ vect accélération: $\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R(\dot{\theta})^2\vec{e}_r + h\ddot{\theta}\vec{e}_z$

Cas particulier: $\omega = \dot{\theta} = \text{cte}$.

$$\vec{v} = -R(\dot{\theta})^2\vec{e}_r = -R\omega^2\vec{e}_r$$

vect accé de la base de Frenet:

$$+ \text{Comp tang } r_t = \frac{dv}{dt}; v = \sqrt{R^2\omega^2 + h^2\omega^2} = \omega\sqrt{R^2 + h^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_t = \sqrt{R^2 + h^2} \frac{d\omega}{dt}$$

$$\text{cas ou } \omega = \text{cte} \Rightarrow \sigma_t = 0 \Rightarrow \sigma = \sigma_n$$

+ Comp norm: $\sigma_n = \frac{v^2}{\rho} = \sigma$

$$\text{or } \sigma = R \cdot \omega^2$$

$$\frac{\omega^2(R^2 + h^2)}{\rho} = R \omega^2 \Rightarrow \rho = \frac{R^2 + h^2}{R} = \text{cte}$$

Mt hélicoïdal uniforme: on remarque bien que $R \neq \rho$



ETUSUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Informatique
Optique
Chimie
Diapo
Algèbre
Corrigés
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..